# 원의 성질

1. 원과 직선
2. 원주각

인류 문명의 발달을 이끈 바퀴, 작은 힘으로 큰 힘을 내는 도르래 등은 모두 원 모양이다. 원은 예로부터 대칭성이 완벽하고 어느 방향에서 보더라도 모양이 똑같기 때문에 조화로운 도형으로 알려졌다.
원의 성질에 대한 이해는 자연, 예술, 건축 등 다양한 분야의 문제를 해결하는 데 기초가 되며, 수학의 다른 영역의 개념을 이해하는 데 도움이 된다.

배운 내용

– 작도와 합동, 평면도형의 성질(중1)
– 삼각형의 성질, 사각형의 성질, 도형의 닮음(중2)

이 단원에서는

Ⅴ–1 원의 현
원의 접선

Ⅴ–2 원주각
원주각의 여러 성질

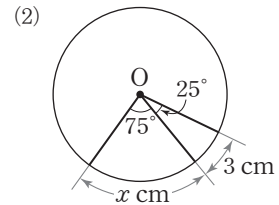
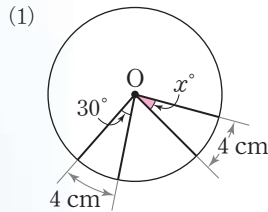
배울 내용

– 원의 방정식(고등학교 수학)

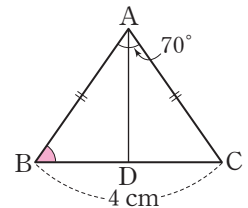
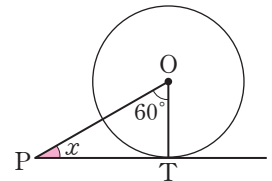
## | 준비 학습 |

**1** 다음 원 O에서 $x$의 값을 구하시오. 중1

(1)

(2)

**2** 오른쪽 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AD}$가 ∠A의 이등분선일 때, 다음을 구하시오. 중2

(1) ∠B의 크기

(2) $\overline{BD}$의 길이

**3** 오른쪽 그림에서 반직선 PT는 원 O의 접선이고, 점 T는 원 O의 접점일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오. 중2

대단원 포트폴리오

이 단원을 학습하면서 다음 중에서 하나를 선택하여 작성해 보자.

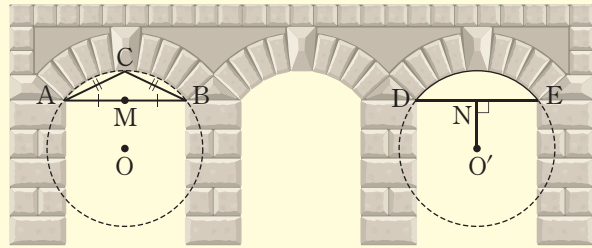
- ☐ 수학 달력
- ☐ 수학 게임
- ☐ 수학 포스터
- ☐ 수학 만화
- ☐ 수학사 보고서
- ☐ 수학 비주얼 싱킹

● 포트폴리오 예시와 길잡이 ▶ 226쪽

# 1 원과 직선

수학 + 건축

프랑스 가르동 강에 있는 가르교(Pont du Gard)는 높이가 약 48 m이고, 길이가 약 275 m인 고대 로마 시대의 수도교로서 유네스코 세계 문화유산으로 등재되어 있다. 이 수도교는 원 모양의 곡선을 이용한 구조물로서 수십 톤의 돌의 무게가 고르게 잘 분산되어 지금까지도 그 형태가 그대로 남아 있다.

**단원 활동** 원 모양의 곡선을 이용한 구조물에서 원과 직선에 대한 성질을 알아보자.

**활동 1** 위의 그림의 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형 ABC에서 밑변 AB의 중점을 M이라고 할 때, 직선 CM이 $\triangle ABC$의 외접원 O의 중심을 지나는지 확인해 보자.

**활동 2** 위의 그림의 원 O′의 중심에서 현 DE에 내린 수선의 발을 N이라고 할 때, 두 선분 DN과 EN의 길이를 비교해 보자.

위의 활동으로 **알게 된 것**과 **나의 학습 계획**을 적어 보자.

**알게 된 것**
- ▶ 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지남을 알 수 있다. 예 ☐ 아니요 ☐
- ▶ 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 알 수 있다. 예 ☐ 아니요 ☐

**학습할 내용** ▶ 원의 현 ▶ 원의 접선

**학습 계획**

------------------------------------------------------------

------------------------------------------------------------

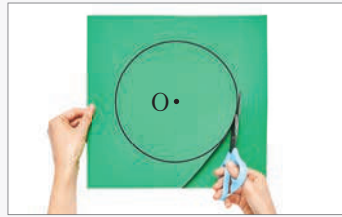
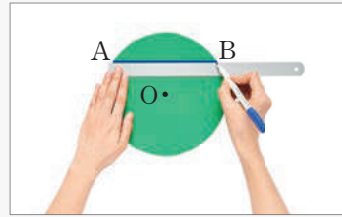
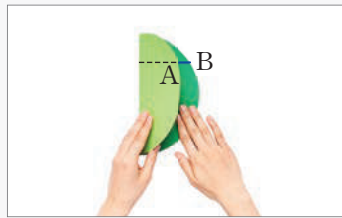
**학습 계획안 예시**
- 예습과 복습을 열심히 하겠다.
- 수업 시간에 집중하겠다.
- 수학에 대한 자신감을 키우겠다.
- 모둠 활동에 적극적으로 참여하겠다.

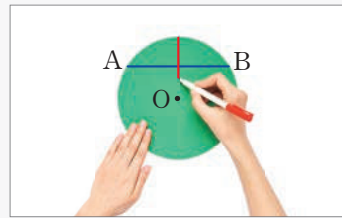
# 원의 현

• 원의 현에 대한 성질을 이해한다.

## 현의 수직이등분선에는 어떤 성질이 있을까?

**개 념 열 기**

다음은 종이를 이용하여 만든 원에서 현의 수직이등분선을 그리는 활동이다.

❶ 컴퍼스를 이용하여 종이 위에 원 O를 그려 오려 낸다.

❷ 원 O에 현 AB를 그린다.

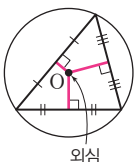
❸ 두 점 A와 B가 겹치도록 접는다.

❹ 종이를 펼쳐서 현 AB의 수직이등분선을 그린다.

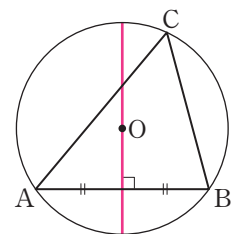
위의 활동에서 현 AB의 수직이등분선이 원 O의 중심을 지나는지 말하시오.

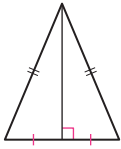
위의 개념 열기에서 현 AB의 수직이등분선은 원 O의 중심을 지남을 알 수 있다.

이와 같은 성질이 항상 성립하는지 알아보자.

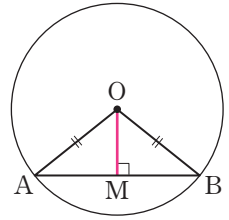
**중2 에서 배웠어요!**

삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.

오른쪽 그림과 같이 원 O에 현 AB를 긋자. 원 위에서 또 다른 점 C를 잡으면 원 O는 △ABC의 외접원이므로 원의 중심 O는 △ABC의 외심이다.

따라서 △ABC의 한 변 AB의 수직이등분선은 원 O의 중심을 지난다.

**중2 에서 배웠어요!**

이등변삼각형의 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선은 밑변을 수직이등분한다.

한편 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분하는지 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 현 AB에 내린 수선의 발을 M이라고 하면 △OAB는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{OM}}$은 $\overline{\mathrm{AB}}$를 이등분한다.

즉, 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

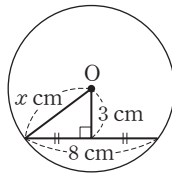
### 현의 수직이등분선

❶ 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

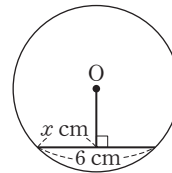
❷ 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분한다.

**스스로 확인하기**

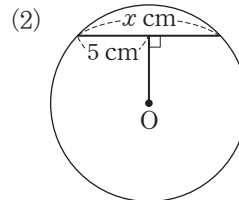
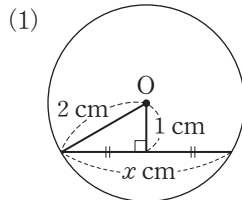
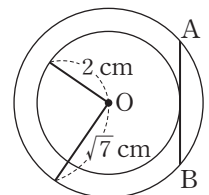
빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

(1) 원 O에서 현의 수직이등분선은 원 O의 중심을 지나므로

➜ $x=\sqrt{3^2+4^2}$
$=\square$

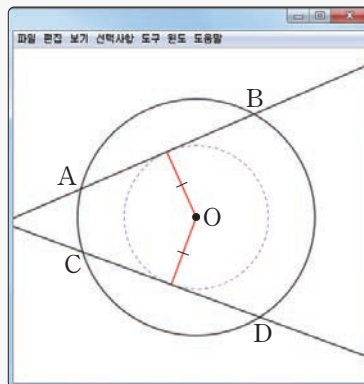
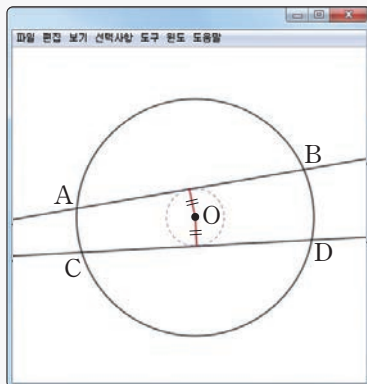
(2) 원 O의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분하므로

➜ $x=\frac{1}{2}\times\square$
$=\square$

**문제 01** 다음 원 O에서 $x$의 값을 구하시오.

(1)

(2)

**문제 02** 오른쪽 그림과 같이 점 O를 중심으로 하는 두 원이 있다. 큰 원의 현 AB가 작은 원에 접할 때, 현 AB의 길이를 구하시오.

## 현의 길이에는 어떤 성질이 있을까?

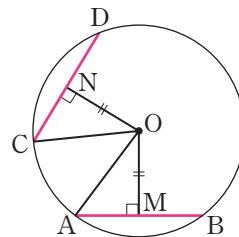
**개 념 열 기**

다음 그림은 공학적 도구를 이용하여 원 O를 그리고, 원 O의 중심에서 같은 거리가 되도록 두 현 AB와 CD를 그린 것이다.

위의 각각의 그림에서 두 현 AB와 CD의 길이를 비교하시오.

위의 개념 열기에서 한 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현 AB와 CD의 길이는 같음을 알 수 있다.

이와 같은 성질이 항상 성립하는지 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 같은 거리에 있는 두 현 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라고 하면 △OAM과 △OCN에서

$$\angle OMA = \angle ONC = 90^\circ$$
$$\overline{OA} = \overline{OC}$$
$$\overline{OM} = \overline{ON}$$

이므로 △OAM≡△OCN(RHS 합동)이다.

따라서 $\overline{AM} = \overline{CN}$이다.

그런데 수선 OM과 수선 ON은 각각 현을 수직이등분하므로

$$\overline{AB} = 2\overline{AM}, \quad \overline{CD} = 2\overline{CN}$$

이다.

따라서 $\overline{AB} = \overline{CD}$이다.

즉, 한 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.

**중2 에서 배웠어요!**

직각삼각형의 합동 조건

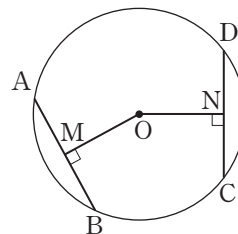
❶ 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같을 때 (RHA 합동)

❷ 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같을 때(RHS 합동)

문제 03

오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 두 현 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 두 직각삼각형 OAM과 OCN을 그리시오.

(2) $\overline{AB}=\overline{CD}$이면 $\overline{OM}=\overline{ON}$임을 설명하시오.

이상을 정리하면 다음과 같다.

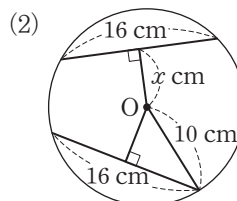
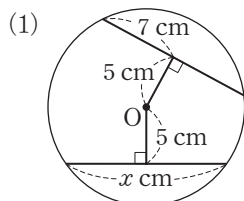
**현의 길이**

❶ 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.

❷ 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

다음 원 O에서 $x$의 값을 구하시오.

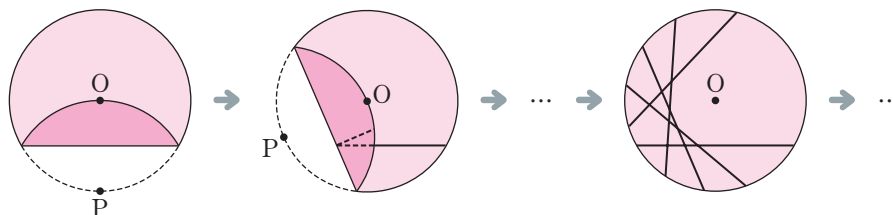
(1)

(2)

추론 | 의사소통

**추론하고 설명할 때는**

✔ 관찰과 추측으로 수학적 사실을 이끌어 낸다.

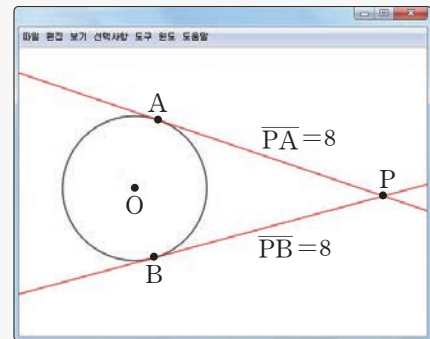
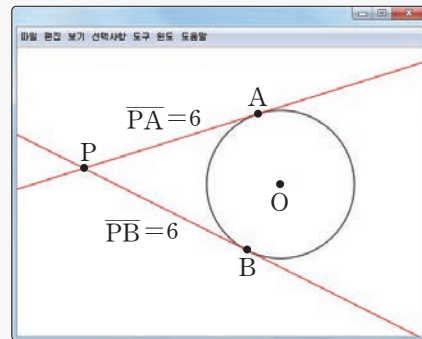
✔ 자신의 의견을 논리적으로 설명한다.

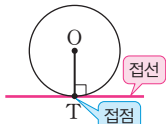
다음 그림과 같이 중심이 O인 원 모양의 종이를 원 위의 점 P가 원의 중심 O와 겹치도록 접는다. 점 P가 원주를 한 바퀴 돌 때까지 점 P의 위치를 바꾸면서 이 과정을 반복하면 접은 선에 의해 원 O의 내부에 새로운 도형이 만들어진다. 이 도형이 어떤 도형에 가까워지는지 말하고, 그 이유를 설명하시오.

# 원의 접선

• 원의 접선에 대한 성질을 이해한다.

## 원의 접선에는 어떤 성질이 있을까?

**개 념 열 기**

다음 그림은 공학적 도구를 이용하여 원 O를 그리고, 원 O 밖의 한 점 P를 잡아 그 위치를 바꾸어 가며 원 O에 접선을 그은 것이다. 두 점 A, B가 원 O의 접점일 때, 각각의 그림에서 두 선분 PA와 PB의 길이를 비교하시오.

**중2 에서 배웠어요!**

원의 접선은 원과 한 점에서 만나는 직선이고 반지름 OT에 수직이다.

위의 개념 열기에서 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그을 수 있는 접선은 2개이고, 두 선분 PA와 PB의 길이는 같다.

이와 같은 성질이 항상 성립하는지 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라고 하면 △PAO와 △PBO에서

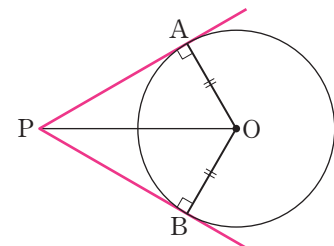
$\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$

$\overline{OP}$는 공통

$\overline{OA}=\overline{OB}$

이므로 △PAO≡△PBO(RHS 합동)이다.

따라서 $\overline{PA}=\overline{PB}$이다.

즉, 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 접선을 그을 때, 점 P에서 접점까지의 거리를 점 P에서 원 O에 그은 접선의 길이라고 한다.

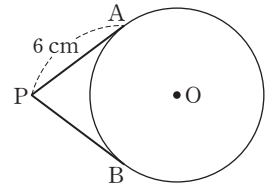
이상을 정리하면 다음과 같다.

**접선의 길이**

원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

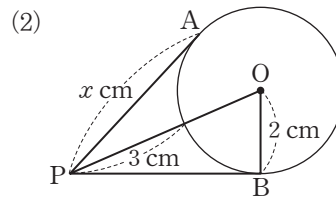
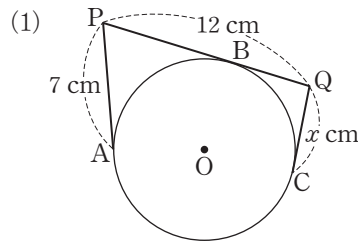
**스스로 확인하기**

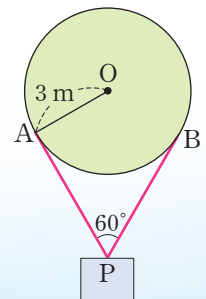
오른쪽 그림과 같이 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라고 하면 두 접선의 길이는 같으므로

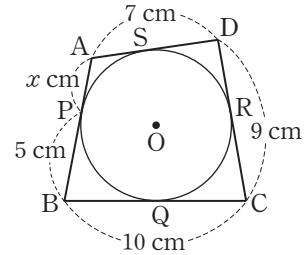
$\overline{PB}=\overline{PA}=\square$ cm

빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

**문제 01** 다음 그림에서 세 점 A, B, C는 원 O의 접점일 때, $x$의 값을 구하시오.

(1)

(2)

**문제 02** 


오른쪽 그림은 반지름의 길이가 3 m인 구 모양의 열기구의 단면을 원 모양으로 나타낸 것이다. $\overline{PA}$, $\overline{PB}$는 원 O의 접선이고, 두 점 A, B는 그 접점이다. $\angle APB=60^\circ$일 때, $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$의 길이의 합을 구하시오.

접선의 길이의 성질을 이용하여 문제를 해결해 보자.

오른쪽 그림에서 □ABCD는 원 O에 외접하고 네 점 P, Q, R, S는 그 접점일 때, $x$의 값을 구하시오.

풀이 접선의 길이의 성질에 의하여

$\overline{BQ}=\overline{BP}=5$ cm, $\overline{CR}=\overline{CQ}=10-5=5$(cm)

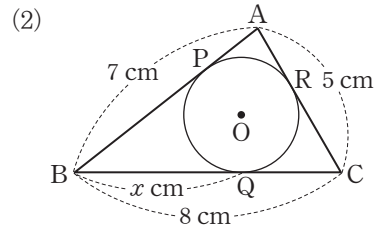
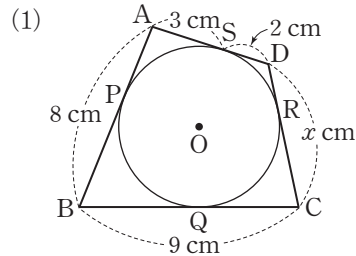
$\overline{DS}=\overline{DR}=9-5=4$(cm), $\overline{AP}=\overline{AS}=7-4=3$(cm)

따라서 $x=3$이다.

답 3

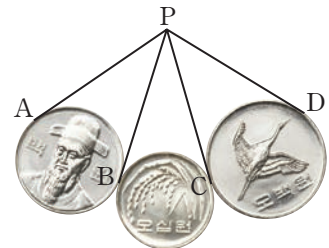
다음 그림에서 □ABCD와 △ABC가 각각 원 O에 외접하고 네 점 P, Q, R, S는 그 접점일 때, $x$의 값을 구하시오.

(1)

(2)

추론 | 의사소통

**추론하고 설명할 때는**

- 관찰과 추측으로 수학적 사실을 이끌어 낸다.
- 자신의 의견을 논리적으로 설명한다.

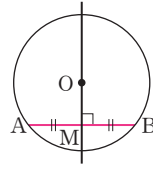
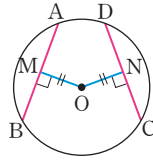
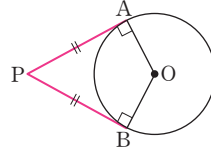
오른쪽 그림에서 100원, 50원, 500원짜리 동전이 서로 접해 있을 때, 그 접점을 각각 B, C라고 하자. 또 두 접점에서 접선을 각각 그어 두 접선이 만나는 점을 P라고 할 때, 점 P에서 그은 다른 접선의 접점을 각각 A, D라고 하자. 다음 서준이의 말에 대한 자신의 생각을 말하시오.

서준

반지름의 길이가 작은 원의 접선의 길이가 더 길어 보이네?
원의 반지름의 길이에 따라 접선의 길이는 달라지는 것 같아.

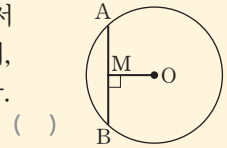
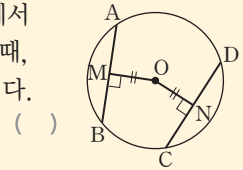
# 중단원 학습 점검

정답 및 해설 ▸ 263쪽

## 개념 정리

- **현의 수직이등분선**
  ❶ 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.
  ❷ 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분한다.
  ➔ $\overline{AB} \perp \overline{OM}$이면 $\overline{AM}=\overline{BM}$

- **현의 길이**
  ❶ 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다. ➔ $\overline{OM}=\overline{ON}$이면 $\overline{AB}=\overline{CD}$
  ❷ 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다. ➔ $\overline{AB}=\overline{CD}$이면 $\overline{OM}=\overline{ON}$

- **접선의 길이**
  원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 길이는 같다. (접선의 길이: 점 P에서 접점 A, B까지의 거리)
  ➔ 두 접점을 각각 A, B라고 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}$

## O, X 문제

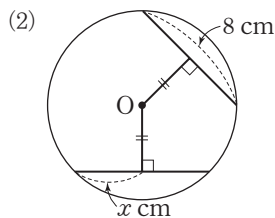
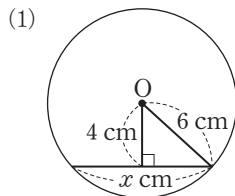
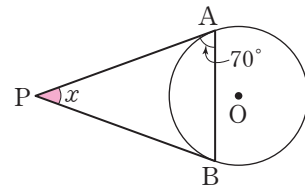
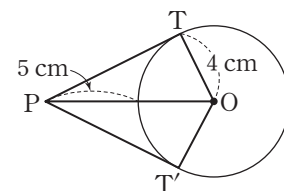
다음 문장이 옳으면 O, 옳지 않으면 X를 (  ) 안에 쓰시오.

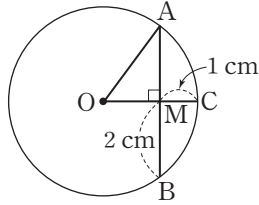
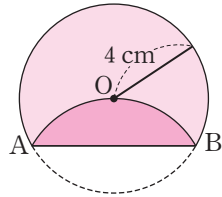
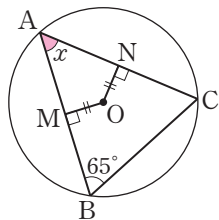
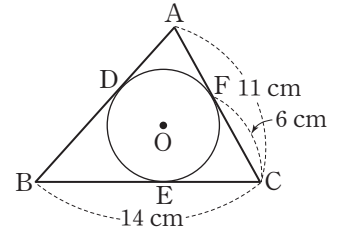
**1** 오른쪽 원 O에서 $\overline{AB} \perp \overline{OM}$일 때, $\overline{AM}=\overline{OM}$이다. (  )

**2** 오른쪽 원 O에서 $\overline{OM}=\overline{ON}$일 때, $2\overline{AM}=\overline{CD}$이다. (  )

**3** 원 밖의 한 점에서 그 원에 그을 수 있는 접선은 무수히 많다. (  )

## 기초 문제

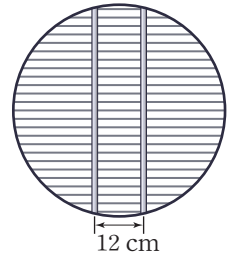
**1** 다음 원 O에서 $x$의 값을 구하시오.

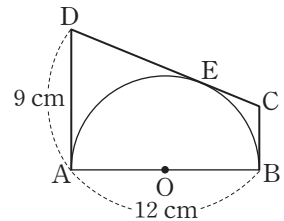
(1)

(2)

**2** 다음 그림에서 두 점 A, B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

**3** 다음 그림에서 두 점 T, T′은 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점일 때, $\overline{PT'}$의 길이를 구하시오.

## 기본 문제

**4** 오른쪽 원 O에서 $\overline{AB} \perp \overline{OC}$일 때, $\overline{OA}$의 길이를 구하시오.

**5** 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 4 cm인 원 모양의 종이를 $\overline{AB}$를 접는 선으로 하여 $\overset{\frown}{AB}$가 원의 중심 O를 지나도록 접었을 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하시오.

**6** 오른쪽 원 O에서 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{ON} \perp \overline{AC}$이고 $\overline{OM} = \overline{ON}$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

**7** 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$는 원 O에 외접하고 세 점 D, E, F는 그 접점일 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하시오.

## 도전 문제

**8** 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 26 cm인 원 모양의 석쇠가 있다. 이 석쇠에서 평행한 두 개의 굵은 철사의 길이는 같고, 그 사이의 간격은 12 cm라고 한다. 이때 평행한 두 굵은 철사의 길이의 합을 구하시오.

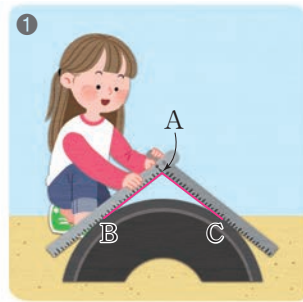
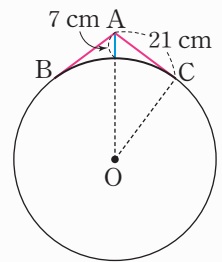
(단, 철사의 굵기는 생각하지 않는다.)

**9** 오른쪽 그림에서 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$는 반원 O의 접선이고, 세 점 A, B, E는 그 접점이다. 이때 $\overline{CB}$의 길이를 구하시오.

스스로 푸는 자기 주도 학습 수학 익힘책 ▶ 238쪽

## 수행 과제 원의 일부로 반지름의 길이를 알 수 있을까?

문제 해결

**활동 목표** 원과 직선의 성질을 이용하여 원의 일부로부터 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.

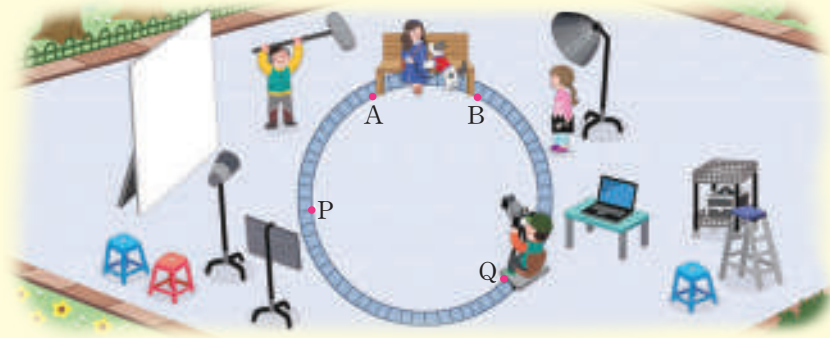
**1** 다음은 원의 일부를 이용하여 원의 반지름의 길이를 구하는 방법이다.

❶ 원의 일부로 만들어진 대상에 대하여 접거나 펼 수 있는 자를 이용하여 자가 교차하는 지점 A에서부터 자가 대상에 접하는 지점 B(또는 지점 C)까지의 거리를 측정한다.
❷ 각도기로 자가 이루는 각($\angle BAC$)의 크기를 측정한다.
❸ ❷에서 측정한 각의 이등분선을 이용하여 자가 교차하는 지점 A에서부터 원까지의 거리를 측정한다.
❹ ❶, ❸에서 측정한 거리를 이용하여 원의 반지름의 길이를 구한다.

위의 과정에서 측정한 값이 오른쪽 그림과 같을 때, 원 O의 반지름의 길이를 구하고, 그 과정을 설명해 보자.

**2** 우리 생활 주변 또는 사진 등의 자료에서 원의 일부만을 사용하여 만든 도구나 조형물을 찾아 **1**과 같은 방법으로 원의 반지름의 길이를 구하고, 그 과정을 설명해 보자.

# 2 원주각

수학 + 기술

영화나 TV 프로그램을 제작할 때, 촬영 기사는 카메라를 여러 방향으로 움직이면서 다양한 각도로 영상을 촬영한다. 이때 흔들림 없는 영상을 얻기 위해 레일을 설치하고, 그 레일을 따라 움직이면서 촬영한다. 특히 원형 레일을 이용하면 촬영 대상을 바라보는 범위는 같으면서 다양한 위치에서 촬영할 수 있다.

**단원 활동** 원형 레일을 이용하여 원 위의 세 점이 이루는 각에 대하여 알아보자.

**활동 1** 위의 그림에서 두 점 A, B가 촬영 대상의 양 끝일 때, 원형 레일의 원 위의 두 점 P, Q에 대하여 ∠APB, ∠AQB를 각각 그려 보자.

**활동 2** 활동 1에서 그린 두 각의 크기를 비교해 보자.

위의 활동으로 **알게 된 것**과 **나의 학습 계획**을 적어 보자.

**알게 된 것** ▶ 한 원에서 같은 호에 대하여 생기는 두 각의 크기를 비교할 수 있다. 예 ☐ 아니요 ☐

**학습할 내용** ▶ 원주각 ▶ 원주각의 여러 성질

**학습 계획**

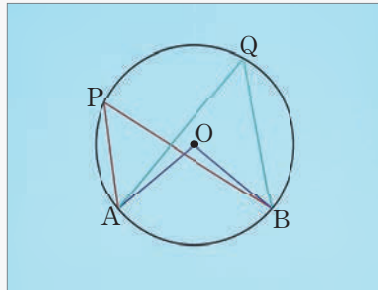
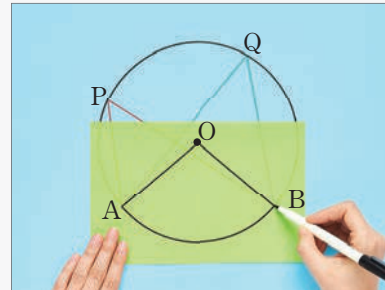
**학습 계획안 예시**
- 예습과 복습을 열심히 하겠다.
- 수업 시간에 집중하겠다.
- 수학에 대한 자신감을 키우겠다.
- 모둠 활동에 적극적으로 참여하겠다.

# 원주각

• 원주각의 기본 성질을 이해한다.

## ◆ 원주각은 무엇일까?

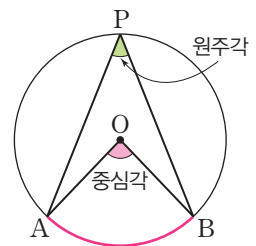
**개 념 열 기**

다음은 원에서 각의 크기를 비교하는 활동이다.

❶ 원 O 위에 네 점 A, B, P, Q를 잡고 각 점을 위의 그림과 같이 선분으로 연결한다.

❷ 원 O 위에 투명 종이를 올려 놓고 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각 ∠AOB를 그린 후 부채꼴 OAB를 오려 낸다.

위의 활동에서 오려 낸 ∠AOB를 반으로 접은 각의 크기와 ∠APB, ∠AQB의 크기를 각각 비교하시오.

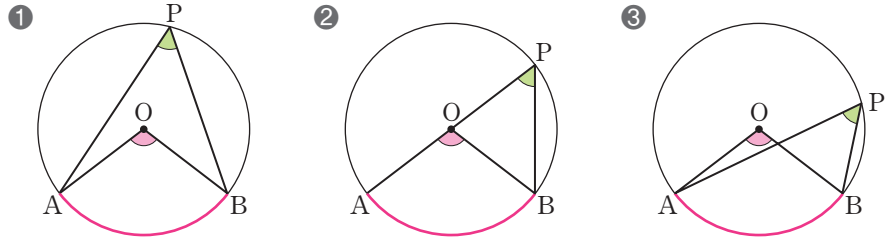
**중1 에서 배웠어요!**
$\overset{\frown}{AB}$는 호 AB를 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 원 O에서 $\overset{\frown}{AB}$ 위에 있지 않은 점 P에 대하여 ∠APB를 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 **원주각**이라 하고, $\overset{\frown}{AB}$를 원주각 ∠APB에 대한 호라고 한다.

$\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각 ∠AOB는 하나로 정해지지만 원주각 ∠APB는 점 P의 위치에 따라 무수히 많다.

위의 개념 열기에서 ∠AOB를 반으로 접은 각의 크기와 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 두 원주각 ∠APB, ∠AQB의 크기는 서로 같음을 알 수 있다.

따라서 원주각 ∠APB의 크기는 점 P의 위치에 관계없이 중심각 ∠AOB의 크기의 $\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

이와 같은 성질이 항상 성립하는지 알아보자.

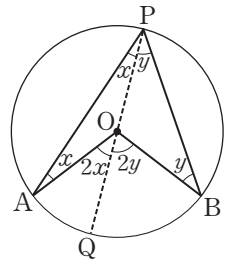
$\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각의 크기가 180°보다 작을 때, 원주각 $\angle APB$와 원의 중심 O의 위치 관계는 원의 중심 O가 $\angle APB$의 내부에, 한 변 위에, 외부에 있는 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

❶
❷
❸
❶의 경우에 오른쪽 그림과 같이 원 O의 지름 PQ를 그으면 △OPA, △OPB는 이등변삼각형이다.

$$\angle OPA=\angle OAP=x$$
$$\angle OPB=\angle OBP=y$$

라고 하면 $\angle APB=x+y$이다.

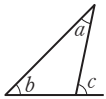
이때 $\angle AOQ=2x$, $\angle BOQ=2y$이므로

$$\angle AOB=2x+2y=2(x+y)=2\angle APB$$

이다. 따라서 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$이다.

**중1 에서 배웠어요!**

삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

$a$, $b$, $c$

➜ $\angle c=\angle a+\angle b$

위의 ❷의 경우에 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$임을 설명하시오.

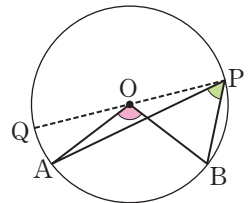
다음은 위의 ❸의 경우에 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$임을 설명하는 과정이다. 빈칸에 알맞은 것을 쓰시오.

오른쪽 그림과 같이 원 O의 지름 PQ를 그으면

$\angle QPB=\frac{1}{2}$☐, $\angle QPA=\frac{1}{2}$☐

이므로 $\angle APB=\angle QPB-$☐

$=\frac{1}{2}$☐$-\frac{1}{2}$☐$=\frac{1}{2}$☐

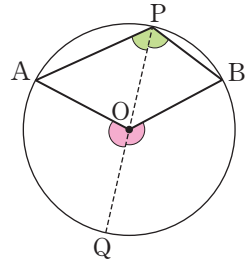
O, P, Q, A, B

한편 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각의 크기가 $180^\circ$보다 크거나 같을 때도 오른쪽 그림과 같이 원 O의 지름 PQ를 그으면 앞의 ❷의 경우에 의하여

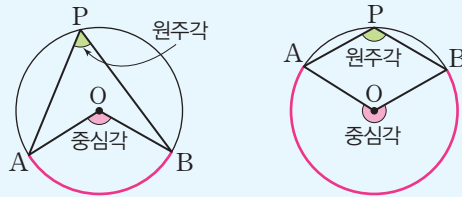
$$\angle APQ=\frac{1}{2}\angle AOQ, \quad \angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BOQ$$

이므로

$$\begin{aligned}\angle APB&=\angle APQ+\angle BPQ\\&=\frac{1}{2}(\angle AOQ+\angle BOQ)\\&=\frac{1}{2}\angle AOB\end{aligned}$$

이다.

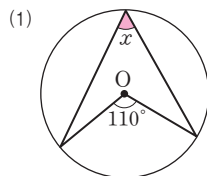
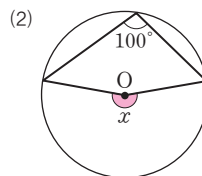
이상을 정리하면 다음과 같다.

**원주각과 중심각의 크기**

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같고, 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다. 즉, 다음 그림에서 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$이다.

**스스로 확인하기**

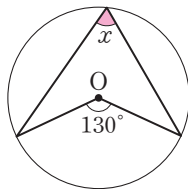
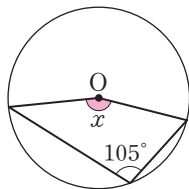
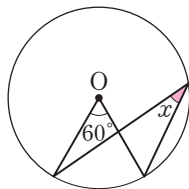
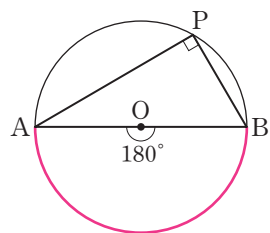
원 O에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로

(1)

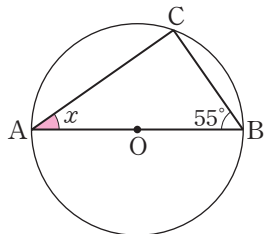
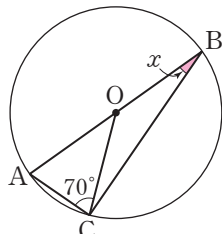
➜ $\angle x=\frac{1}{\square}\times 110^\circ=\square^\circ$

(2)

➜ $\angle x=\square\times 100^\circ=\square^\circ$

빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

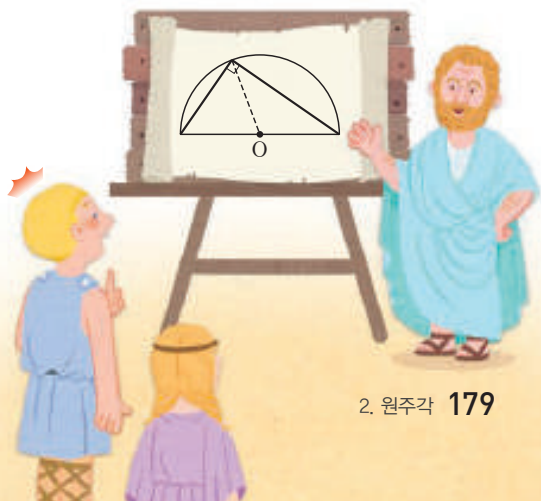
**문제 03** 다음 원 O에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1) (2) (3)

오른쪽 그림과 같이 원 O에서 $\overset{\frown}{AB}$가 반원일 때, 중심각 $\angle AOB$의 크기는 $180°$이므로 반원에 대한 원주각 $\angle APB$의 크기는 $90°$임을 알 수 있다.

**문제 04** 다음 그림에서 $\overline{AB}$가 원 O의 지름일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1)

(2)

문제 해결 | 의사소통

**문제를 해결하고 설명할 때는**

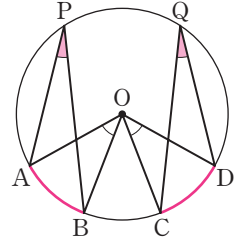
- 문제의 조건과 정보를 파악하고 풀이 전략을 생각한다.
- 자신의 의견을 논리적으로 설명한다.

고대 그리스의 수학자 탈레스(Thales, B.C. 624?~B.C. 546?)는 반원에 대한 원주각이 직각임을 이등변삼각형의 성질을 이용하여 알아냈다고 한다. 탈레스가 이용한 방법을 설명하시오.

## ◆ 원주각의 크기와 호의 길이 사이에는 어떤 관계가 있을까?

**중1 에서 배웠어요!**

한 원 또는 합동인 두 원에서 호의 길이가 같은 두 부채꼴의 중심각의 크기는 같다.

오른쪽 그림의 원 O에서 길이가 같은 두 호 AB, CD에 대하여 중심각 ∠AOB, ∠COD의 크기는 같으므로 그 원주각 ∠APB, ∠CQD의 크기도 같다.

한편 ∠APB=∠CQD이면 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

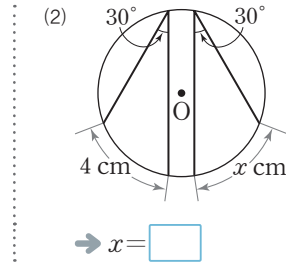
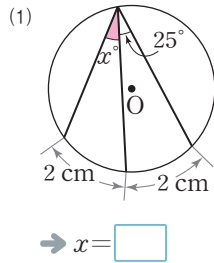
**원주각과 호**

한 원 또는 합동인 두 원에서

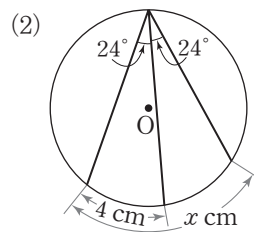
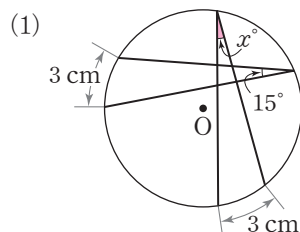
❶ 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

❷ 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이는 같다.

**| 참고 |** 호의 길이는 그 호에 대한 중심각의 크기에 정비례하므로 호의 길이는 그 호에 대한 원주각의 크기에 정비례한다.

**스스로 확인하기**

**문제 05** 다음 원 O에서 $x$의 값을 구하시오.

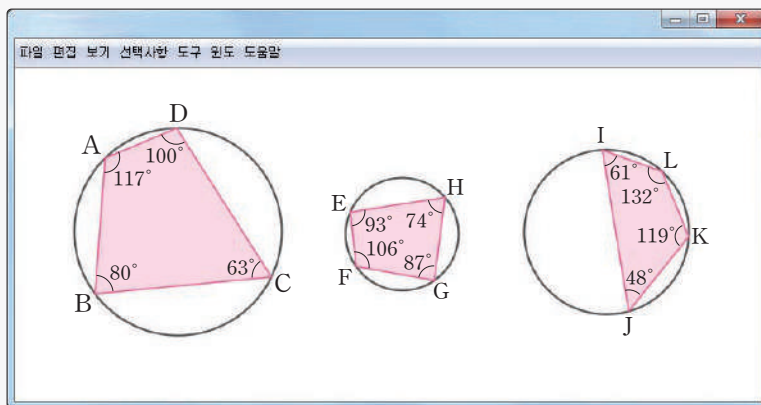
(1)

(2)

# 원주각의 여러 성질

• 원주각의 여러 성질을 이해한다.

## ◆ 원에 내접하는 사각형에는 어떤 성질이 있을까?

**개 념 열 기**

다음 그림은 공학적 도구를 이용하여 원에 내접하는 사각형을 그린 후, 원의 크기와 사각형의 모양을 바꾸어 가며 사각형의 내각의 크기를 측정한 것이다.

원에 내접하는 사각형에서 마주 보는 두 각의 크기의 합을 각각 비교하시오.

위의 개념 열기에서 사각형이 원에 내접하면 마주 보는 두 각의 크기의 합은 $180°$임을 알 수 있다.

이 성질이 항상 성립하는지 알아보자.

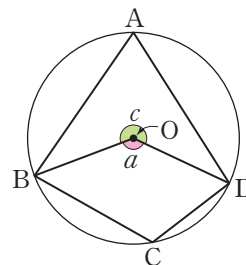
오른쪽 그림과 같이 사각형 ABCD가 원 O에 내접할 때, $\overset{\frown}{\mathrm{BCD}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{BAD}}$에 대한 중심각을 각각 $\angle a$, $\angle c$라고 하면

$$\angle \mathrm{A}=\frac{1}{2}\angle a,\quad \angle \mathrm{C}=\frac{1}{2}\angle c$$

이고, $\angle a+\angle c=360°$이므로

$$\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{C}=\frac{1}{2}(\angle a+\angle c)=180°$$

이다.

마찬가지로 $\angle \mathrm{B}+\angle \mathrm{D}=180°$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

### 원에 내접하는 사각형의 성질

원에 내접하는 사각형에서 마주 보는 두 각의 크기의 합은 $180^\circ$이다. 즉, 오른쪽 그림에서

$\angle A + \angle C = 180^\circ$

$\angle B + \angle D = 180^\circ$

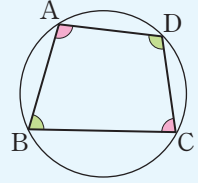
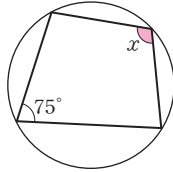
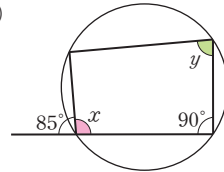
(1)

➔ $\angle x = 180^\circ - 75^\circ = \square^\circ$

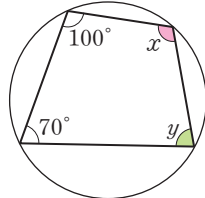
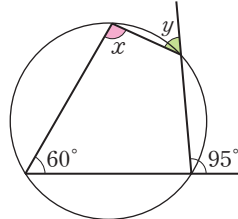
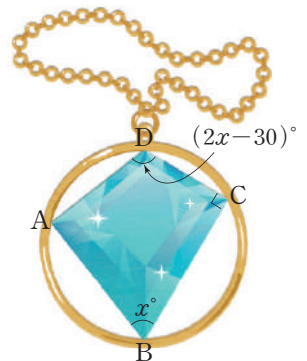
(2)

➔ $\angle x = 180^\circ - \square^\circ = \square^\circ$

$\angle y = 180^\circ - \square^\circ = \square^\circ$

빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

다음 그림에서 $\angle x$, $\angle y$의 크기를 각각 구하시오.

(1)

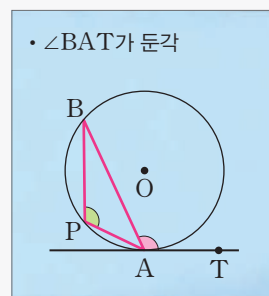
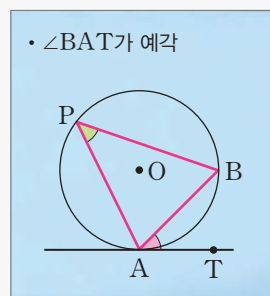
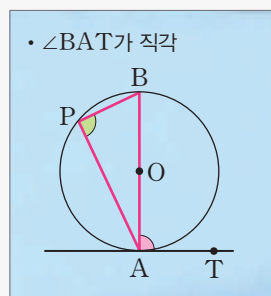
(2)

오른쪽 그림은 원에 내접하는 사각형 모양으로 디자인한 목걸이이다. 사각형 ABCD가 원에 내접할 때, $x$의 값을 구하시오.

## ◆ 원의 접선과 현이 이루는 각에는 어떤 성질이 있을까?

**개 념 열 기**

다음은 원의 접선과 현이 이루는 각의 성질을 알아보는 활동이다.

❶ 원 O 위의 점 A에서 접선 AT를 긋는다.

❷ 접점 A를 지나는 현 AB를 ∠BAT가 직각, 예각, 둔각이 되도록 각각 긋는다.

❸ ∠BAT 내부에 있는 원 O의 호 AB에 대한 원주각 ∠BPA를 각각 나타낸다.

위의 활동에서 각도기를 이용하여 ∠BAT와 ∠BPA의 크기를 각각 비교하시오.

위의 개념 열기에서 ∠BAT가 직각, 예각, 둔각일 때 그 크기를 ∠BPA의 크기와 각각 비교하면 모두 ∠BAT=∠BPA임을 알 수 있다.

이와 같은 성질이 항상 성립하는지 알아보자.

오른쪽 그림에서 ∠BAT가 직각일 때, 현 AB는 원 O의 지름이므로 ∠BPA는 반원에 대한 원주각이다.

따라서 ∠BPA는 직각이므로

$$\angle BAT=\angle BPA$$

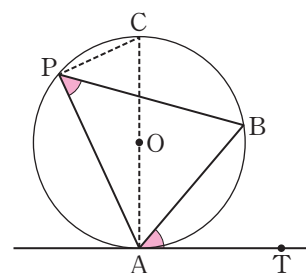
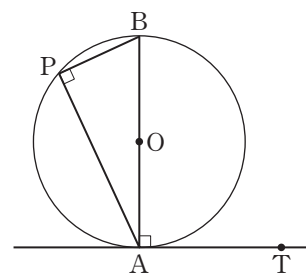
이다.

오른쪽 그림에서 ∠BAT가 예각일 때, 지름 AC와 선분 PC를 그으면

$$\angle CAT=\angle CPA=90^\circ$$

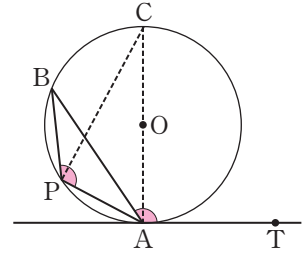
이고, ∠CAB, ∠CPB는 $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각이므로

$$\angle CAB=\angle CPB$$

이다.

한편 $\angle BAT = \angle CAT - \angle CAB = 90^\circ - \angle CAB$,

$\angle BPA = \angle CPA - \angle CPB = 90^\circ - \angle CAB$

이므로 $\angle BAT = \angle BPA$이다.

다음은 오른쪽 그림에서 직선 AT가 원 O의 접선이고 $\angle BAT$가 둔각일 때, $\angle BAT$ 내부에 있는 원 O의 호 AB에 대한 원주각 $\angle BPA$에 대하여 $\angle BAT = \angle BPA$임을 설명하는 과정이다. 빈칸에 알맞은 것을 쓰시오.

원 O의 지름 AC와 선분 PC를 그으면

$\angle BPC$, $\angle BAC$는 ☐에 대한 원주각이므로

$\angle BPC = \angle BAC$

이때 $\angle CAT = \angle CPA = 90^\circ$이고,

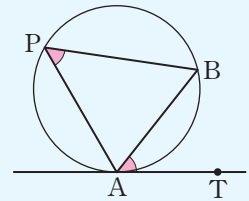
$\angle BAT = \angle BAC + \angle CAT = \angle BAC + ☐^\circ$

$\angle BPA = \angle BPC + ☐ = \angle BPC + ☐^\circ$

이므로 $\angle BAT = \angle BPA$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

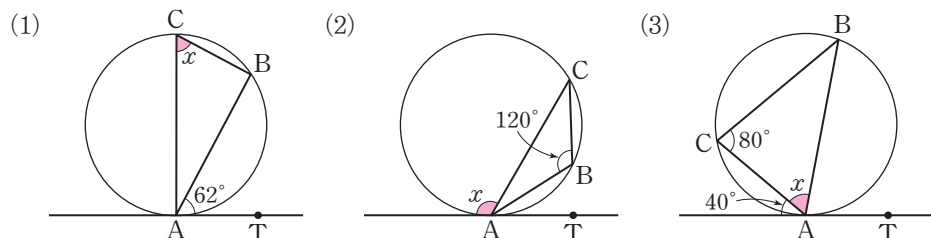
**접선과 현이 이루는 각**

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. 즉, 오른쪽 그림에서 $\angle BAT = \angle BPA$

문제 04

다음 그림에서 직선 AT는 원의 접선이고 점 A는 그 접점일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1)

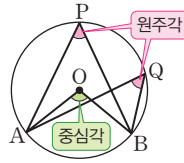
(2)

(3)

# 중단원 학습 점검

## 개념 정리

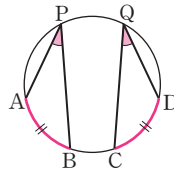
● **원주각과 중심각의 크기**

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같고, 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.

➜ $\angle APB=\angle AQB$, $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$

● **원주각의 크기와 호의 길이**

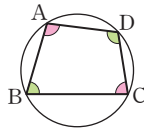
한 원 또는 합동인 두 원에서

❶ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$이면 $\angle APB=\angle CQD$

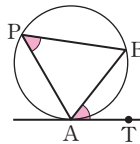
❷ $\angle APB=\angle CQD$이면 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

● **원에 내접하는 사각형의 성질**

□ABCD가 원에 내접할 때,

$\angle A+\angle C=180^\circ$

$\angle B+\angle D=180^\circ$

● **원의 접선과 현이 이루는 각의 성질**

직선 AT는 원의 접선이고 점 A는 그 접점일 때,

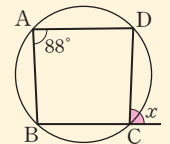
$\angle BAT=\angle BPA$

### O, X 문제

다음 문장이 옳으면 O, 옳지 않으면 X를 ( ) 안에 쓰시오.

**1** 원에서 한 호에 대한 원주각은 무수히 많다. ( )

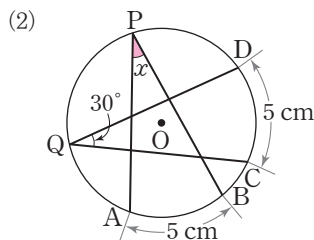
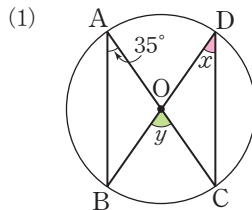
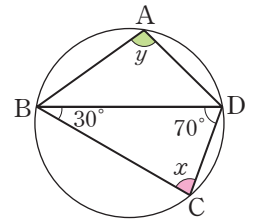
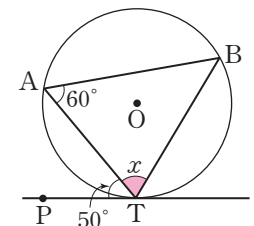
**2** 반원에 대한 원주각의 크기는 $180^\circ$이다. ( )

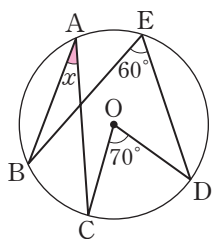
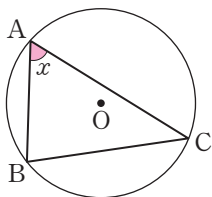
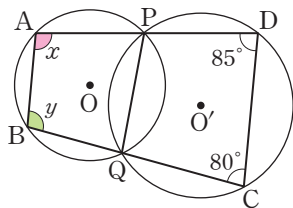
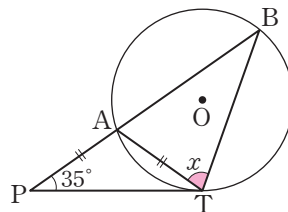
**3** 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 서로 같다. ( )

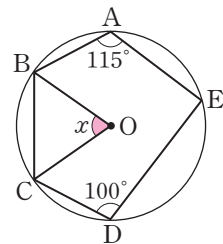
**4** 오른쪽 그림에서 □ABCD가 원에 내접할 때, $\angle x$의 크기는 $92^\circ$이다. ( )

## 기초 문제

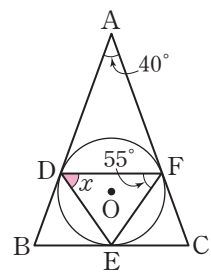
**1** 다음 원 O에서 $\angle x$, $\angle y$의 크기를 각각 구하시오.

(1)

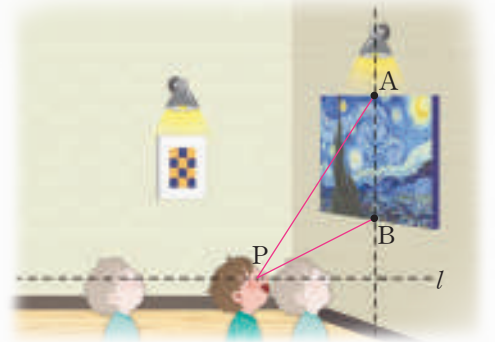
(2)

**2** 오른쪽 그림에서 □ABCD가 원에 내접할 때, $\angle x$, $\angle y$의 크기를 각각 구하시오.

**3** 오른쪽 그림에서 직선 PT는 원 O의 접선이고 점 T는 그 접점일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

## 기본 문제

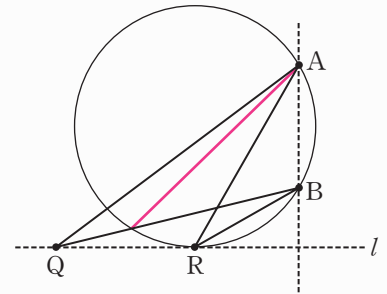
**4** 오른쪽 원 O에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

**5** 오른쪽 원 O에서 $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CA} = 2 : 3 : 4$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

**6** 다음 그림에서 $\overline{PQ}$는 두 원 O, O′의 공통인 현일 때, $\angle x$, $\angle y$의 크기를 각각 구하시오.

**7** 다음 그림에서 $\overline{PT}$는 원 O의 접선이고, 점 T는 그 접점이다. $\overline{AP}=\overline{AT}$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

## 도전 문제

**8** 오른쪽 그림에서 오각형 ABCDE가 원 O에 내접할 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

**9** 오른쪽 그림에서 원 O는 △ABC의 내접원이면서 △DEF의 외접원이고, 세 점 D, E, F는 원 O의 접점이다. 이때 $\angle x$의 크기를 구하시오.

스스로 푸는 자기 주도 학습 수학 익힘책 ▶ 239쪽

## 수행 과제 그림을 감상할 때, 어느 위치에서 보는 게 좋을까?

**활동 목표** 원주각의 성질을 이용하여 각의 크기가 최대가 되는 지점을 찾을 수 있다.

독일의 수학자 레기오몬타누스(Regiomontanus, 1436~1476)는 벽에 걸린 그림 전체를 쳐다보는 각의 크기가 최대가 되는 지점을 찾는 문제를 생각했다고 한다.
오른쪽 그림과 같이 벽에 걸린 그림의 위 끝, 아래 끝을 각각 점 A, B라 하고, 벽으로부터 앞뒤로 움직이는 사람의 눈의 위치를 점 P, 점 P를 지나고 지면과 평행한 직선을 $l$이라고 할 때, 그림을 쳐다보는 각은 ∠APB이다. 다음 문제를 해결해 보자.

**1** 오른쪽 그림은 두 점 A, B를 지나고 직선 $l$에 접하는 원을 그린 것이다. 두 점 Q, R는 직선 $l$ 위의 점이고, 점 R는 직선 $l$과 원의 접점이다.

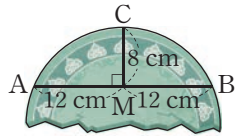
(1) ∠ARB와 크기가 같은 각을 찾아보자.

(2) ∠AQB와 ∠ARB의 크기를 비교해 보자.

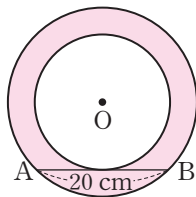
**2** 점 P의 위치가 어디에 있을 때, 그림을 쳐다보는 각의 크기가 최대가 되는지 설명해 보자.

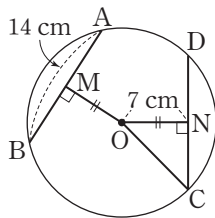
# 대단원 학습 평가

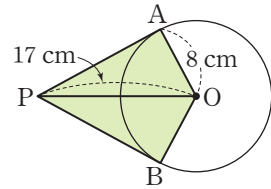
●●○

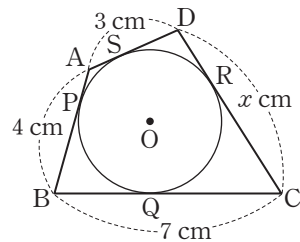
**1** 오른쪽 그림은 어느 고분에서 출토된 원 모양의 접시의 깨진 조각이다. 원래 이 접시의 반지름의 길이를 구하시오.

●●●

**2** 오른쪽 그림과 같이 점 O를 중심으로 하는 두 원에서 큰 원의 현 AB가 작은 원의 접선일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하시오.

●○○

**3** 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 두 현 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라고 하자. $\overline{OM}=\overline{ON}$일 때, $\overline{OC}$의 길이를 구하시오.

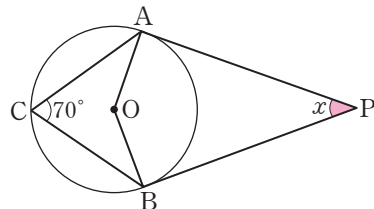
●●○

**4** 오른쪽 그림에서 두 점 A, B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점일 때, □APBO의 넓이를 구하시오.

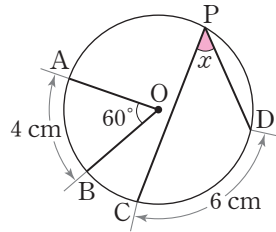
●●○

**5** 오른쪽 그림에서 □ABCD는 원 O에 외접하고 네 점 P, Q, R, S는 그 접점일 때, $x$의 값을 구하시오.

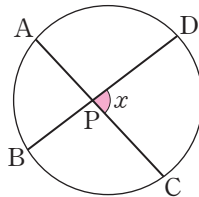
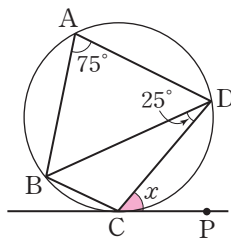
●●○

**6** 다음 그림에서 두 점 A, B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점일 때, $\angle x$의 크기는?

① $35°$ ② $40°$ ③ $45°$
④ $50°$ ⑤ $55°$

정답 및 해설 ▸ 266쪽

●●○

**7** 오른쪽 원 O에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

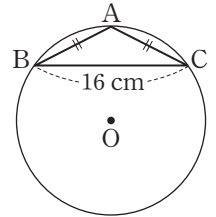
●●○

**8** 오른쪽 그림에서 $\overset{\frown}{AB}$의 길이는 원의 둘레의 길이의 $\frac{1}{5}$이고 $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{CD} = 3 : 4$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

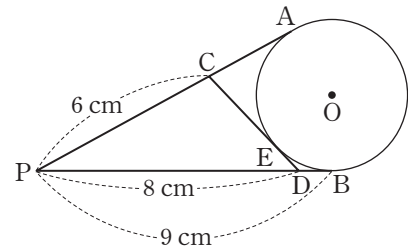
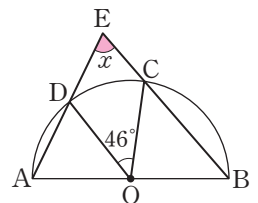
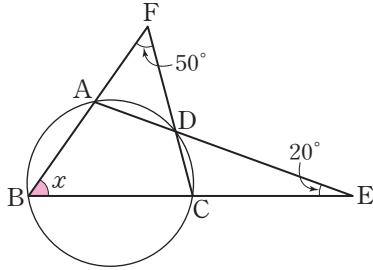
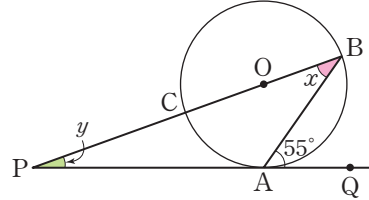
●○○

**9** 오른쪽 그림에서 직선 CP는 원의 접선이고, 점 C는 그 접점일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

## 서 술 형 문 제

[10~14] 다음 문제의 풀이 과정을 자세히 쓰시오.

●●○

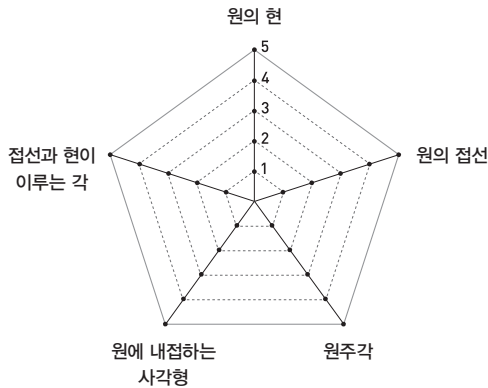
**10** 오른쪽 그림에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC가 원 O에 내접하고, 원 O의 반지름의 길이가 10 cm일 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하시오.

●●○

**11** 다음 그림에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{CD}$는 원 O의 접선이고 세 점 A, B, E는 그 접점일 때, $\overline{CD}$의 길이를 구하시오.

●●●

**12** 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 O에서 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$의 연장선의 교점을 E라고 할 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

**13** 다음 그림과 같이 원에 내접하는 □ABCD에서 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$의 연장선의 교점을 E라 하고 $\overline{BA}$, $\overline{CD}$의 연장선의 교점을 F라고 할 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

**14** 다음 그림과 같이 원 O 위의 점 A에서 접하는 직선 AQ와 지름 BC의 연장선이 만나는 점을 P라고 하자. $\angle BAQ=55°$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\angle x$의 크기

(2) $\angle y$의 크기

## 자기 평가

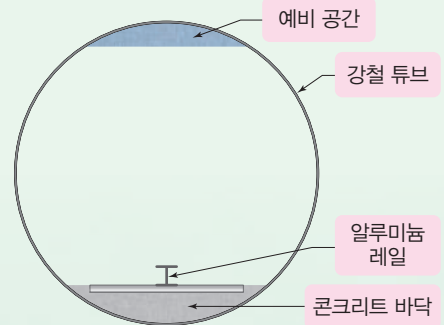
**1** 이 단원에서 학습한 내용에 대한 나의 성취 수준을 다음 그림에 점으로 표시하고, 이웃한 점을 선으로 연결해 보자.

| 성취 수준 |
1수준: 개념을 이해하기 어려웠다.
2수준: 문제를 해결하기 어려웠다.
3수준: 문제를 일부 해결하였다.
4수준: 문제를 대부분 해결하였다.
5수준: 문제를 모두 해결하였다.

이해가 부족한 내용은 본문을 복습!
문제가 더 필요하면
수학 익힘책 ▶ 238~239쪽

**2** 이 단원을 시작할 때 세운 학습 계획을 잘 실천하였는지 평가해 보고, 이해하기 어려웠던 내용을 적어 보자.

# 미래의 교통수단 '하이퍼루프'

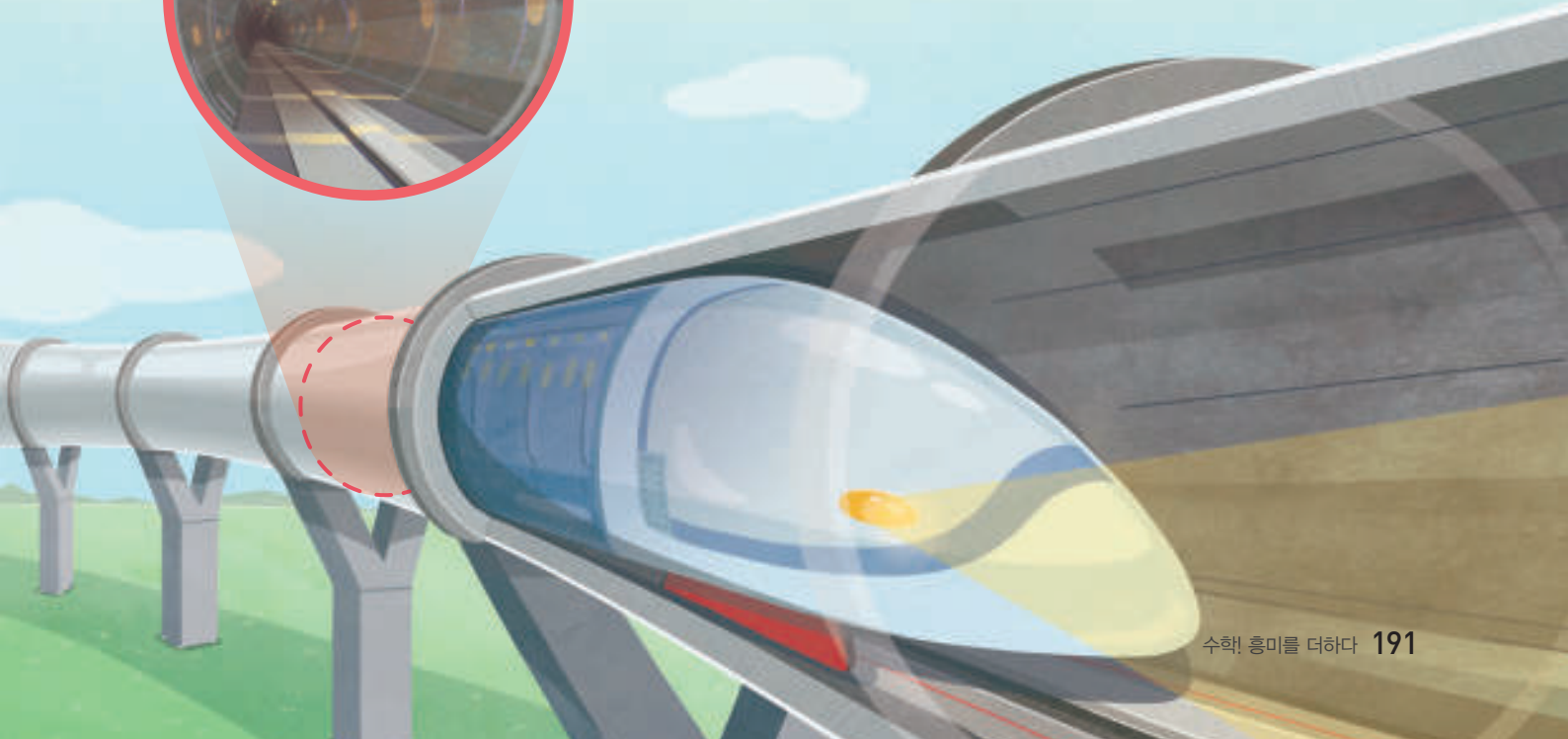
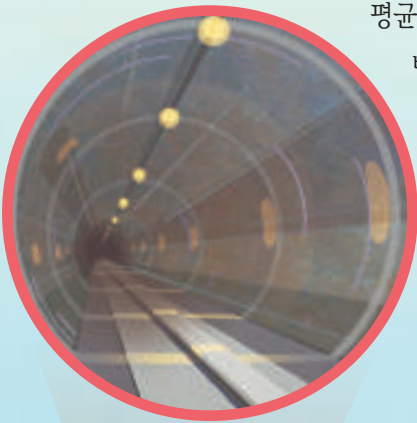
하이퍼루프(Hyperloop)란 진공에 가까운 튜브 안에서 캡슐형 차량을 운행하는 초음속 미래형 교통수단이다.

초음속의 속력을 내기 위해서는 진공 튜브 안에서 레일 위를 자기 부상 방식으로 주행하도록 하여 공기 저항과 마찰을 최대한 줄여야 한다. 이때 진공 튜브의 단면은 원 모양이고, 레일은 원의 현에 해당하는 바닥의 수직이등분선 위에 좌우대칭으로 놓여 있다.

〈하이퍼루프 튜브의 단면 구조의 예〉

하이퍼루프의 최대 속력은 음속인 시속 1224 km 이상이 가능하지만, 곡선 구간 등에서는 속력을 줄여야 하기 때문에 평균 속력은 약 시속 960 km 정도로 예상되고 있다. 평균 속력이 시속 900 km인 비행기와 비교하면 하이퍼루프는 인류 역사상 가장 빠른 육상 운송 수단이 될 것으로 기대된다.

(참고 자료: 강재윤, "하이퍼웨이 운송관 구조 설계 방안")

# 창의 융합 프로젝트

수학 + 디자인

공판화(스텐실)는 판에 그림을 그린 후 구멍을 뚫고, 그 구멍을 통해 잉크나 물감을 찍어내는 판화의 일종이다. 공판화는 좌우가 바뀌지 않고, 여러 가지 채색 도구를 선택할 수 있으며 인테리어 등 다양한 분야에 활용된다.

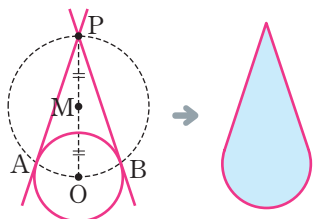
완성!

## 물방울 모양으로 공판화 만드는 방법

**준비물:** 자, 컴퍼스, OHP 필름(또는 두꺼운 종이), 칼, 투명 테이프, 스펀지, 물감

### 물방울 모양 디자인하기

❶ 원 O를 그리고 원 O 밖의 한 점 P를 정한 후, $\overline{PO}$의 중점 M을 표시한다.

❷ 점 M을 중심으로 하고 $\overline{MP}$를 반지름으로 하는 원을 그린 후, 원 O와의 두 교점 A, B를 찾아 직선 PA와 직선 PB를 긋는다. 이때 두 직선 PA, PB는 원 O의 접선이다. 이를 이용하여 물방울 모양을 디자인한다.

### 공판화 만들기

❸ OHP 필름(또는 두꺼운 종이)에 디자인한 밑그림을 그리고 그림을 따라 OHP 필름에 구멍을 뚫는다.

❹ 구멍을 뚫은 OHP 필름을 종이 또는 천 위에 올리고 투명 테이프로 고정한 다음, 스펀지에 물감을 묻혀 찍는다. 말린 다음 고정한 판을 떼어 내어 공판화를 완성한다.

공판화를 이용하여 가방을 만들어 보자.

활동지

## 물방울 모양으로 가방 만들기

■ 모둠명:  ■ 모둠원:

**1** 물방울 모양 디자인하기에서 원 O의 반지름의 길이와 원 O 밖의 한 점 P의 위치를 바꾸면 여러 가지 물방울 모양을 만들 수 있다. 이를 이용하여 나만의 물방울 모양의 도안을 만들어 보자.

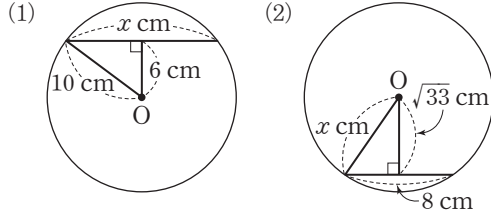
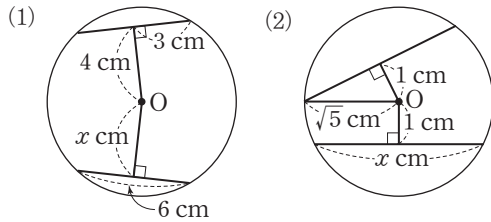
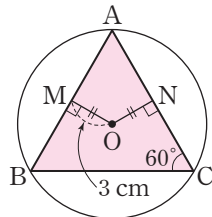
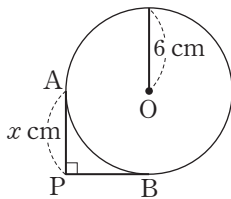
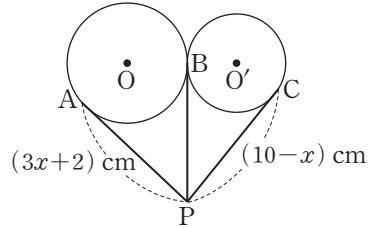
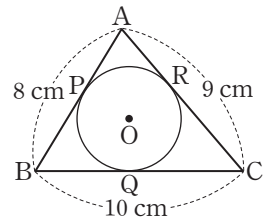
**2** 모둠에서 만든 여러 가지 물방울 모양의 공판화 도안을 이용하여 가방을 만들어 보자.

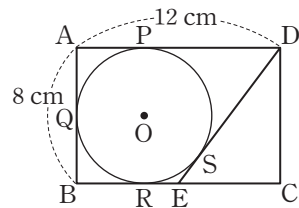
| 동료 평가 | 활동에 적극적으로 참여하였는가? |
|---|---|
| | 친구의 의견을 잘 듣고 존중하였는가? |
| | 활동 과정에서 다양하고 좋은 의견을 많이 냈는가? |
| | 활동 과정에서 서로 협력하였는가? |

스스로 푸는 자기 주도 학습

# 수학 익힘책

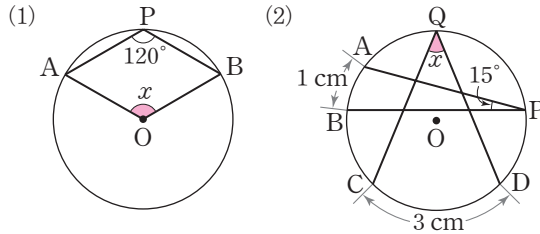
●○○
**1** 다음 원 O에서 $x$의 값을 구하시오.

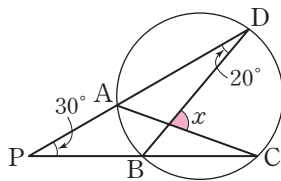
(1)
(2)
●○○
**2** 다음 원 O에서 $x$의 값을 구하시오.

(1)
(2)
●●●
**3** 오른쪽 원 O에서 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$, $\overline{ON}\perp\overline{AC}$이고 $\overline{OM}=\overline{ON}$일 때, △ABC의 넓이를 구하시오.

●●○
**4** 오른쪽 그림에서 두 점 A, B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점일 때, $x$의 값을 구하시오.

●○○
**5** 다음 그림에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$가 원 O 또는 원 O′의 접선이고 세 점 A, B, C는 그 접점일 때, $x$의 값을 구하시오.

●●○
**6** 오른쪽 그림에서 △ABC는 원 O에 외접하고, 세 점 P, Q, R는 그 접점일 때, $\overline{CR}$의 길이를 구하시오.

●●●
**7** 다음 그림에서 원 O는 직사각형 ABCD의 세 변과 $\overline{DE}$에 접하고, 네 점 P, Q, R, S는 그 접점일 때, △DEC의 둘레의 길이를 구하시오.

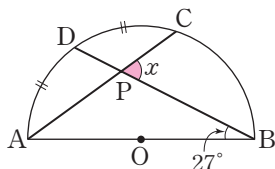
●○○

**1** 다음 원 O에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

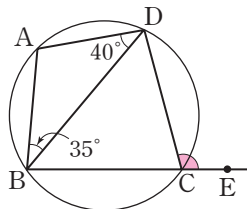
(1)

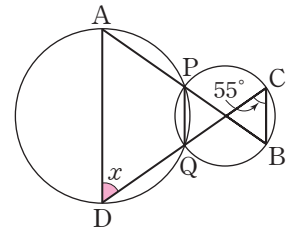
(2)

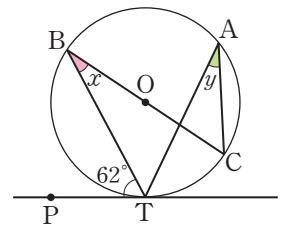
●●○

**2** 다음 그림과 같이 두 현 DA, CB의 연장선의 교점을 P라고 할 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

●●●

**3** 다음 그림과 같이 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 O에서 $\widehat{AD}=\widehat{CD}$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

●●○

**4** 오른쪽 그림에서 □ABCD는 원에 내접하고, 점 E는 $\overline{BC}$의 연장선 위의 점일 때, $\angle$DCE의 크기를 구하시오.

●●○

**5** 다음 그림과 같이 두 원의 교점 P, Q를 지나는 두 직선이 두 원과 만나는 점을 각각 A, B, C, D라고 할 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

●●○

**6** 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$가 지름인 원 O에서 $\overleftrightarrow{PT}$는 원 O의 접선이고 점 T는 그 접점이다. 이때 $\angle x$, $\angle y$의 크기를 각각 구하시오.

●●○

**7** 다음 그림에서 두 점 A, B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점이다.
$\widehat{AC}:\widehat{BC}=1:2$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.